解析的ザリスキー構造とHrushovski generic構造(さまざまな体における定義可能集合の構造の研究)

板井, 昌典

数理解析研究所講究録
第 1574 巻 2007 年 39-49

解析的ザリスキー構造と Hrushovski generic 構造
Analytic Zariski structures and Hrushovski generic structures

板井　昌典 (ITAI Masanori)
東海大学　理学部　情報数理学科
Dept. of Math. Sciences, Tokai University

概要

Zilber introduced the notion of analytic Zariski structures as an analytic version of Zariski structures. After examining the axioms of analytic Zariski structures, we review the idea of viewing Hrushovski generic structures as models of analytic Zariski structures.

はじめに

代数的閉体における代数的集合の性質を抽象化することによってザリスキー幾何というモデル理論が Zilber によって考えられ，Hrushovski が幾何的モーデル・ラング予想を解決する際に利用することによって一躍脚光を浴びた．

自然な発展として，「解析的集合」の性質を抽象化する解析的ザリスキー幾何というモデル理論をやはり Zilber が提唱している．([Z1] 参照)

本稿では，Peatfield, Zilber の論文 [PZ] を中心に，解析的ザリスキー構造の一般論を概観し，Hrushovski generic 構造を解析的ザリスキー構想と捉える方法について考察する．

1　解析的ザリスキー幾何の公理系

まず [PZ] から，解析的ザリスキー幾何の公理系を紹介する．ついで Zilber の講義ノート [Z3] との相違点について適宜のべる．

構造 $\mathbf{M} = (M, \cdots)$ と $\mathbf{P} = (P, \cdots)$ がつぎの性質 A-C を満たすとき，構造 $\mathbf{M}$ を**コンパクト化可能な解析的ザリスキー幾何**と呼ぶ．あるいは $\mathbf{P}$ を**コンパクト解析的ザリスキー幾何**と呼ぶ．ここで M と P に関しては，互いに一方から他方は定義可能であるとする．したがって定義可能性の観点からは，どちらか一方だけに着目しても不都合は特に生じない．

$\mathcal{C}$ を $\bigcup_{n \in \mathrm{N}} P^n$ の定義可能集合の集まりとし，$\mathcal{C}$ に属する集合を $\mathcal{C}$-閉集合と呼ぶ．

1.1　公理系 A

集合族 $\mathcal{C}$ は以下の公理 A-1〜A-5 を満たしている．このとき，$\mathcal{C}$-閉集合の任意個の共通部分 $S \subseteq P^n$ を閉集合とよぶ．また閉集合の補集合を開集合とよぶ．閉集合，開集合をそれぞれ $S \subseteq_{cl}$, $U \subseteq_{op} P^n$ と書く．さらに，$S \subseteq_{cl} P^n$ のとき，任意の $U \subseteq_{op} P^n$ に対して，$C = S \cap U$ は U の中で閉であるといい，$C \subseteq_{cl} U$ と書く．

1. P 自身，P の各 1 点集合，および $P \times P$ の対角線はそれぞれ $\mathcal{C}$ に属する．
2. $\mathcal{C}$ に属する有限個の集合の共通部分および和集合は，$\mathcal{C}$ に属す（ただし次元は共通とする）．また，直積をとる操作と射影に関して閉じている．
3. $\mathcal{C}$ に属する集合からなる集合族 $\mathcal{A}$ は，有限交差性をみたすならば $\bigcap \mathcal{A} \neq \emptyset$ である．すなわち，$\mathbf{P}$ は $\mathcal{C}$ に関してコンパクトである．
4. M は P の開集合である ($M \subset_{op} P$).
5. 射影は，開写像かつ閉写像である．

注意 1 $X \subseteq P^n$ は $\mathcal{C}$ に属する集合 F_i の任意個の共通部分になっているとき，閉集合であると定める．上の公理系からこの定義により，各 P^n に実際に位相が定義されていることを確認する．

- $\emptyset$ が閉集合であることは，$a \neq b \in P^n$ に対して，$\{a\} \cap \{b\} = \emptyset$ であることから分かる．つぎに P^n が閉集合であることは，公理 A-1, A-2 から，任意の n に対して $P^n \in \mathcal{C}$ であることから分かる．
- $F_i \subseteq P^n$ $(i \in I)$ が閉集合族のとき $\bigcap_{i \in I} F_i$ が閉集合になることは定義から明らか．
- F_1, F_2 が閉集合のとき，$F_1 \cup F_2$ が閉集合であることを示す．$F_1 = \bigcap_{i \in I} C_i$ かつ $F_2 = \bigcap_{j \in J} D_j$ とし，各 i, j について $C_i, D_j \in \mathcal{C}$ とする．

$$F_1 \cup F_2 = \bigcap_{(i,j) \in I \times J} (C_i \cup D_j) \tag{1}$$

となっていることを示せばよい．
等式 (1) の $\subseteq$ は明らかだから，$\supseteq$ を示す．$x \in \bigcap_{(i,j) \in I \times J} (C_i \cup D_j)$ とする．もし $\exists i \in I(x \notin C_i)$ ならば $\forall j \in J(x \in D_k)$ である．また，もし $\exists j \in J(x \notin D_k)$ ならば $\forall i \in I(x \in C_i)$ である．よって $\supseteq$ が示された．$C_i \cup D_k \in \mathcal{C}$ だから $F_1 \cup F_2$ は閉集合である．

注意 2 Zilber の講義ノート [Z3] では，やや違った形で公理系が提示されている．まず [PZ] と異なり，M のコンパクト化 P は公理系には明示的に現れない．

1.2 解析的集合に関する公理系 B

P^n の開集合 U と閉集合 C に対して，$S = C \cap U \subseteq_{cl}$ となる集合で**解析集合**と呼ばれる集合は，以下の公理を満たす．$S \subseteq_{an} U$ と書く．

注意 3 公理 A-1，A-2 より P^n は閉集合だから，P^n の開集合 U に対して，$U \subseteq_{cl} U$ である．

定義 4 (固有射影) $S \subseteq_{an} U \subseteq_{op} P^{n+m}$ とする．射影 $pr : P^{n+m} \to P^n$ が次の性質をもつとき，pr は S 上**固有 (proper)** であるという．

- 任意の $S' \subseteq S$ に対して，$S' \subseteq_{cl} U$ ならば $pr(S') \subseteq_{cl} pr(U)$ かつ，任意の $a \in pr(S')$ に対して $pr^{-1}(a) \cap S \subseteq_{cl} P^{n+m}$

注意 5
1. *proper* という語の訳は，複数あり，「固有」とか「適正」がある．[O1] (p. 37 脚注) では「適正」という訳語が使われている．ここでは，「固有」を用いる．[O1] では，コンパクト集合の逆像がコンパクトであるような写像を適正写像と呼んでいる．
2. Zilber の講義ノートでは，全体がコンパクトとは限らない空間で考えているので，上記の $pr^{-1}(a) \cap S \subseteq_{cl} P^{n+m}$ の部分が，$pr^{-1}(a) \cap S$ が M^{n+m} のコンパクト集合となっている．ここで，コンパクト集合の閉部分集合はコンパクト集合であるので，両者の定義は同値である．

定義 6 (解析的既約) $S \subseteq_{an} U$ に対して，$S = S_1 \cup S_2$, $S_1, S_2 \subseteq_{an} U$ となる $S_1, S_2 \neq \emptyset$ が存在しないとき，S は U で解析的既約であるという．

1. $\emptyset \subseteq_{an} U$, $U \subseteq_{an} U$，かつ，任意の $a \in U$ に対して $\{a\} \subseteq_{an} U$
2. $S_1 \subseteq_{an} U_1$ かつ $S_2 \subseteq_{an} U_2$ ならば $S_1 \times S_2 \subseteq_{an} U_1 \times U_2$
3. $S_1, S_2 \subseteq_{an} U$ ならば $S_1 \cap S_2 \subseteq_{an} U$ かつ $S_1 \cup S_2 \subseteq_{an} U$
4. $S \subseteq_{an} U$ とする．任意の $V \subseteq_{op} P^n$ に対して $V \subseteq U$ ならば $S \cap V \subseteq_{an} V$ である．
5. $S \subseteq_{an} U$ かつ射影 pr が S 上適正ならば，$pr(S) \subseteq_{an} pr(U)$
6. $S \subseteq_{cl} U$ かつ $a \in S$ とすると，$S_a, S'_a \subseteq_{an} U$ が存在して，
   (a) $S_a = \cup_{finite} V_i$，$a \in V_i$ かつ $V_i \subseteq_{an} U$ は解析的既約
   (b) $a \in S_a - S'_a$
   (c) $S = S_a \cup S'_a$
7. $U \subseteq_{op} P^n$ は U で解析的既約である．

定義 7 公理 B-6 に現れる各 V_i を，S における a の解析的既約成分とよぶ．

1.3 次元に関する公理系 C

空でないすべての解析的集合 $S \subseteq_{an} U \subseteq_{op} P^n$ に対して次元 $\dim S$ が定義され，次の性質を持つ．

1. P の各点 a に対して $\dim(a) = 0$ であり，空でない開集合 $U \subseteq_{op} P$ に対して $\dim U = 1$.
2. $S_1 \subseteq_{an} U$，$S_2 \subseteq_{an} V$ に対して，$U \subseteq V$ ならば $\dim U \leq \dim V$.
3. $S \subseteq_{an} U$ ならば，

$$\dim S = \max\{\dim S_a : S_a \text{ は } S \text{ の解析的既約成分 }\}$$

4. $S \subseteq_{an} U \subseteq_{op} P^n$ が解析的既約ならば，任意の開集合 $V \subseteq_{op} P^n$ に対して，$S \cap V$ は V の中で解析的既約であり，$S \cap V \neq \emptyset$ ならば $\dim(S \cap V) = \dim S$
5. $S \subseteq_{an} U$ が解析的既約ならば，任意の $S_1 \subseteq S$ に対して $S_1 \subseteq_{an} U$ ならば，$\dim S_1 < \dim S$ または $S_1 = S$
6. $S \subseteq_{an} U \subseteq_{op} P^{n+m}$ かつ，射影 $pr : P^{n+m} \to P^n$ が S 上正規ならば，

$$\dim pr(S) = \dim S - \min\{\dim(pr^{-1}(u) \cap S) : u \in pr(S)\}$$

7. $S \subseteq_{an} U \subseteq_{op} P^{n+m}$ かつ，射影 $pr : P^{n+m} \to P^n$ が S 上正規ならば，任意の k に対して

$$\{a \in pr(S) : \dim(pr^{-1}(a) \cap S) \geq k\} \subseteq_{an} pr(U)$$

P を **M** のコンパクト化と呼び，**P** をコンパクト解析的ザリスキー幾何とよぶ．さらに3つの概念を定義する．

定義 8 P^n の定義可能部分集合は，$pr(S)$ の形の集合の（有限）ブール和になっている．ただし，$S \subseteq_{an} U \subseteq_{op} P^m \quad (n \leq m)$ である．

定義 9 $S_1, S_2 \subseteq_{an} U$ がそれぞれ解析的既約ならば，$S_1 \cap S_2$ の任意の既約成分 S_0 に対して，

$$\dim S_0 \geq \dim S_1 + \dim S_2 - \dim U$$

定義 10 $U \subseteq_{op} P^n$ とする．$S \subseteq U$ に対して，解析的次元 $\mathrm{ark}_U(S)$ を次の性質を満たすように定義する．

1. $\mathrm{ark}_U(S) = 0$ になるのは，$S = \emptyset$ のときであり，またそのときに限る．
2. $\mathrm{ark}_U(S) \leq k+1$ になるのは，$S_1 \subseteq_{cl} U$，$S_1 \subseteq S$ かつ $\mathrm{ark}_U(S_1) \leq k$ であるような S_1 が存在し，さらに $(S - S_1) \subseteq_{an} (U - S_1)$ となっているときである．
3. $\mathrm{ark}_U(S) = \min_{n \in \mathbf{N}}\{\mathrm{ark}_U(S) \leq n\}$

任意の $S \subset_{op} U$ に対して $S \in \mathcal{C}$ ならば，有限な解析的次元をもつものとする．

注意 11 論文 [PZ] における解析的ザリスキー幾何の公理系は冗長性があり，Zilber の講義ノートでは公理系は簡素化されている．(もちろん本質的には同等のものであるが)

1.4 1点コンパクト化

解析的ザリスキー構造 M を考える場合は，そのコンパクト化 **P** が何かが問題になるが通常は無限遠点 ∞ を付け加えて，1点コンパクト化する．

$\overline{M} = M \cup \{\infty\}$ とし，射影平面の記法に習って $\mathbf{P} = \overline{M}$ とする．

ここで位相空間論における,「アレクサンドロフの1点コンパクト化」を思い出しておこう．

X を位相空間とする．X の任意の開被覆が，有限部分被覆をもつとき，X はコンパクト空間であるという．あるいは，X の閉集合の任意の集合族 $\mathcal{F}$ が，有限交叉性をもつならば，$\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$ であるとき X はコンパクト空間である．また $A \subseteq X$ は，X の部分空間としてコンパクト空間であるとき，コンパクト集合という．空集合はコンパクト集合と考える．

さて X がコンパクト空間でない場合，1点 ∞（通常，無限遠点と呼ばれる）をつけ加えて $\overline{X} = X \cup \{\infty\}$ を，つぎのようにコンパクト空間にする．

$O \subseteq \overline{X}$ とする．O が $\overline{X}$ の開集合であるというのは，

- $\infty \notin O$ かつ O は X の開集合，または

- $\infty \in O$ かつ $X - (O - \{\infty\})$ は X のコンパクト集合

と定める．この位相に関して，$\overline{X}$ はコンパクト空間である．

次に，1 階述語論理の構造 M の定義可能集合を用いて定義される位相に関してコンパクト性と 1 点コンパクト化について簡単にまとめておこう．注意 1 と同様の議論により，構造 M に位相を定義する．すなわち M の部分集合は，定義可能（パラメーターを許す）部分集合の任意個の共通部分になっているとき閉集合であると定める（この位相自体は，定義可能とは限らない）．この位相，仮に「論理位相」と呼ぶことにするが，論理位相で M が「コンパクト空間」であるということは，コンパクト性を有限交叉性をもつ集合族の共通部分が空でない空間と定義すると，有限交叉性をもつ定義可能部分集合の族は，共通部分をもつということになる．

1.4.1 Hrushovski 構造の 1 点コンパクト化

ここでは，Hrushovski generic 構造の 1 点コンパクト化についてまとめる．

M を Hrushovski generic 構造とし，$\overline{M} = M \cup \{\infty\}$ とおく．U を M における特別閉集合とすると，任意の $\bar{m} \in \overline{M}^n$ に対して，すくなくとも 1 つの $\bar{m}$ の座標が，∞ ならば $\overline{M} \models U(\bar{m})$ と定義することによって，M における位相を，$\overline{M}$ に自然に拡張することができる．このような拡張を，Hrushovski generic 構造の 1 点コンパクト化と呼ぶ．

$A \subseteq_{fin} \overline{M}$ に対して

$$\delta(A)_\infty = \delta(A - \{\infty\})$$

と定義する．しかし，混同の恐れのないときは，δ_∞ を単に δ と書く．$d_\infty(A)$ も同様に定義し，混同の恐れのないときは，$d_\infty(A)$ を単に $d(A)$ と書く．

定義 12 1. $\mathcal{L}^*_\infty = \mathcal{L}^* \cup \{\infty\}$ とおく．$\mathcal{L}^\infty$ に関して，否定を使わずに定義された関係を $\mathcal{L}^*$-閉集合とよぶ．

2. $\mathcal{L}^*$-閉集合の任意個の共通部分として定義される $\overline{M}^n$ の部分集合を，閉集合とすることによって $\overline{M}^n$ に位相を定義する．

1.5 既約性の 3 つの側面

代数幾何におけるザリスキー位相では，閉集合の無限降下列が存在しないので，既約性は次のように定義される．すなわち，閉集合 F は，2 つの真部分閉集合の和に書けないとき既約であると定義され，どのような閉集合も，有限個の既約閉集合の和集合となっている．

しかし，解析的構造の場合，例えば通常の複素平面で解析的関数の零点集合を考えた場合は，ザリスキー位相のような有限性がない．そこで,「既約性」に関しては複数の側面を考えなければならない．

S を閉集合とする．

1. 通常の既約性：S は 2 つの真部分集合の和集合になっていない．
2. 強既約性：$S_1 \subsetneq S$ かつ $\dim S = \dim S_1$ となる集合 S_1 が存在しない．
3. 解析的既約性：$S_1, S_2 \subsetneq S$ となる解析的集合 S_1, S_2 が存在しない．

2 番目の強既約性が意味を持つためには,「次元」の概念がすでに定義されていることが必要である．抽象的な空間が解析的ザリスキー幾何であることを示す時には，したがってどのような「次元」が定義されているかが重大な関心事になる．

幸い，Hrushovski generic 構造には「組合せ構造」から定義される「次元」が自然に定義されるので，この概念を用いて，Hrushovski generic 構造が解析的ザリスキー幾何になることを示すことになる．

次節で，これら既約性と解析性をどのように定義するかに留意しながら，解析的ザリスキー構造の例を紹介する．

1.6 複素解析幾何における解析集合の性質

ここで，複素解析幾何における解析集合の定義と基本性質を [O1] からまとめておく．

定義 13 局所的に複素ユークリッド空間の構造をもつハウスドルフ空間を，複素多様体とよぶ．M を複素多様体とし A をその部分集合とする．A の任意の点 x に対し，M における x の適当な近傍内で，A が有限個の正則関数の共通零点集合であるとき，すなわち

$$A \cap U_x = \{y \mid f_1(y) = \cdots = f_n(y) = 0,\ f_i \in \mathcal{O}_x\}$$

となる x の近傍 U_x が存在するとき，集合 A を**解析集合**とよぶ．

命題 14 1. 解析的集合は局所閉集合である．

2. M, N を複素多様体，B を N の解析集合とする．
   (i) A が M の解析集合ならば，$A \times B$ は $M \times N$ の解析集合である．
   (ii) $\varphi : M \to N$ が正則写像ならば，$\varphi^{-1}(B)$ は M の解析写像である．
3. A_1, A_2 を M の解析集合とする．
   (i) $A_1 \cap A_2$ は M の解析集合である．
   (ii) A_1, A_2 がそれぞれ閉集合ならば $A_1 \cup A_2$ は解析集合である．
4. M が連結な複素多様体で，A が M の解析集合とする．
   (i) $A \neq M$ ならば $\overline{M - A} = M$
   (ii) $M - A$ は弧状連結である．

定理 15 A を解析集合とする．A の正則点の集合は，A の稠密部分集合である．

定理 16 解析集合芽は，有限個の既約な解析集合芽の和集合として一意的に表現される．

この定理は，解析的ザリスキー幾何の公理 B-6 に対応している．

定義 17 (固有写像) コンパクト集合の逆像がコンパクトであるような写像を固有写像とよぶ．

定理 18 $S_1 \subseteq \mathbb{C}^l$，$S_2 \subseteq \mathbb{C}^m$ をそれぞれ開集合とし，$pr : \mathbb{C}^{l+m} \to \mathbb{C}^l$ を射影とする．$A \subseteq S_1 \times S_2$ が解析集合であり．pr を A に制限した射影が適正写像であるならば，$pr(A)$ は S_1 の解析写像である．

この定理の系として，「$\mathbb{C}^n$ のコンパクトな解析集合は有限集合である」が得られる．また，この定理に対応して，解析的ザリスキー幾何においては次節で述べる「固有写像定理」が成り立つ．

2 解析的ザリスキー構造の固有写像定理

解析的ザリスキー幾何の公理から導かれる定理として固有写像定理を解説する．これは複素解析幾何における同様の定理??に対応している．さらに，解析的集合の任意個の共通部分が解析的集合になることも解説する．

まず解析集合 S の各点 a における解析的既約成分が一意的に定まることを示す．

命題 19 $a \in S \subseteq_{an} \subseteq U \subseteq_{op} \mathbf{P}^n$ とする．公理 B-6 の性質を持つ S_a は唯一定まり，S_a を構成する既約成分も唯一定まる．

証明：公理 B-6 の性質をもつような S_a が 2 通りの表現を持ったとする．すなわち，$S_a = S_1 \cup \cdots \cup S_k$ かつ $C_a = C_1 \cup \cdots C_k$ がそれぞれ公理 B-6 の性質を持ち，さらに S'_a，C'_a も公理 B-6 で規定される性質を持つとする．

まず解析的既約成分の個数が最小になるようなものについてだけ議論すれば十分であるから，S_a，C_a を構成する成分の個数は等しいと仮定してよい．

主張：各 i に対して $S_i \subseteq C_a$ である．もし $S_i \cap C_a \subsetneq S_i$ ならば $S_i - C_a \neq \emptyset$ である．ここで $(U - C_a) \subset_{op}$ であり $S_i - C_a = S_i \cap (U - C_a)$ だから，公理 C-4 と S_i の既約性から，$\dim(S_i - C_a) = \dim S_i$ が得られる．したがって $S_i \subseteq S = C_a \cup C'_a$ より

$$S_i - C_a = S_i \cap (S - C_a) \subseteq S_i \cap C'_a$$

となるから，公理 C-2 より $\dim S_i = \dim(S_i - C_a) \leq \dim(S_i \cap C'_a)$ である．よって公理 C-5 と S_i の既約性から $S_i \cap C'_a = S_i$ となって $S_i \subseteq C'_a$ となる．これは $a \notin S_i$ を意味するので矛盾する．よって主張は証明された．

同様に，各 i に対して $C_i \subseteq S_a$ が証明されるから，$S_a = C_a$ である．

次に $\{S_1, \cdots, S_k\} = \{C_1, \cdots, C_k\}$ を示す．適当に添数を付替えることにして，$S_i = C_i$ を，k に関する数学的帰納法で示すことにする．$k = 1$ のときは明らか．

$k > 1$ のとき．まず $S_1 \cap (C_1 \cup \cdots \cup C_k) = S_1$ だから $S_i \subseteq C_j$ となる j が存在する．$j = 1$ としても一般性を失わない．

$$C_1 - S_1 = C_1 \cap (U - S_1) \subseteq C_1 \cap (S_2 \cup \cdots \cup S_k) \subsetneq C_1$$

$\bigcup_{i=2}^k S_i$ は閉集合であるので，公理 C-5 と C_1 の既約性から $\dim(C_1 - S_1) < \dim C_1$ である．

一方，$U - S_1 \subseteq_{op} U$ に注意すると，公理 C-4 より $C_1 - S_1 = \emptyset$ が得られ $C_1 \subseteq S_1$ となって $C_1 = S_1$ が証明できた．以下帰納法により $S_1 = C_1, \cdots, S_k = C_k$ が証明できる． ■

命題 20 $\mathbf{P}^n$ の解析集合は，有限個の既約成分を持つ．

証明：$S \subseteq \mathbf{P}^n$ が無限個の既約成分を持つとする．公理 B-6 より，各 $a \in S$ に対して解析集合 $S'_a \subseteq S$ が存在し，$a \notin S'_a$ かつ，有限個を除いて S の既約成分はすべて S'_a の部分集合になっている．

ここで集合族 $\mathcal{S} = \{S'_a : a \in S\}$ を考えると，$a \neq b \in S$ に対して S'_a, S'_b はそれぞれ S の既約成分を無限個部分集合として含んでいるから，$S'_a \cap S'_b \neq \emptyset$ である．よって集合族 $\mathcal{S}$ は有限交差性を持つ．よって公理 A-4 より $\bigcap \mathcal{S} \neq \emptyset$ となって矛盾する． ■

射影が固有写像になっている場合は，解析集合の射影は解析集合であることを示そう．

定理 21 (固有写像定理) 解析集合 $S \subseteq_{an} W \subseteq_{op} \mathbf{P}^n$ と，射影 $pr : \mathbf{P}^n \to \mathbf{P}^m$ を考える．$pr(S) \subseteq U \subseteq_{op} \mathbf{P}^m$ となっていて，かつ射影が S 上の固有写像ならば，$pr(S) \subseteq_{an} U$ である．

証明：$a \in S$ を任意の点とする．仮定より射影が固有写像だから，$S_a = pr^{-1}(a) \cap S$ とおけば，S_a は $\mathbf{P}^n$ の閉集合である．$S_a \subseteq S$ だから，命題 18 より，W の解析的既約成分 $S_1, \cdots, S_k$ と解析集合 $S' \subseteq_{an} W$ が存在して，$A_a \cap S' = \emptyset$ かつ $S = \bigcup_{i=1}^k S_i \cup S'$ が成り立つ．$S_a \cap S' = \emptyset$ だから $a \notin pr(S')$ である． よって $U_a = U - pr(S')$ とおくと，$a \in U_a \subseteq_{op} \mathbf{P}^m$ である．射影が固有写像であることから，各 i について $pr(S_i) \subseteq_{cl} U$ である．各 S_i は解析的既約集合だから，強既約集合である．

主張：各 $pr(S_i)$ も強既約集合である．もしそうでなければ，$C \subsetneq pr(S_i)$ かつ $\dim(C) = \dim(pr(S_i))$ となる閉集合 C が存在する．公理 C-6 より

$$\begin{aligned}\dim(S_i) &= \dim(pr(S_i)) + \min_{a \in pr(S_i)}(\dim(pr^{-1}(a) \cap S_i)) \\ &\leq \dim(C) + \min_{a \in C}(\dim(pr^{-1}(a) \cap S_i)) \\ &\leq \dim((C \times \mathbf{P}^{n-m}) \cap S_i)\end{aligned}$$

となるが，これは S_i が強既約であることに反する．よって，$pr(S_i)$ は強既約集合である．したがって，

$$\begin{aligned}pr(S_i) \cap U_a &= pr\left(\bigcup_{i=1}^k S_i \cup S'\right) \cap (U - pr(S')) \\ &= \left(\bigcup_{i=1}^k pr(S_i) \cup pr(S')\right) \cap (U - pr(S')) \\ &= \bigcup_{i=1}^k pr(S_i) \cap (U - pr(S')) \\ &= \bigcup_{i=1}^k (pr(S_i) \cap U_a)\end{aligned}$$

となって，$pr(S)$ は a で解析的である． ■

次に，解析集合の任意個の共通部分が解析集合であることを示す．

命題 22 $V \subseteq_{op} \mathbf{P}^n$ とし $\mathcal{B} = \{T^b : T_b \subseteq_{an} V\ (b \in B)\}$ を解析集合の族とする．このとき $\bigcap \mathcal{B} \subseteq_{an} V$ である．

証明：$a \in \bigcap \mathcal{B}$ とする．公理 B-3 より，任意有限個の $b_1, \cdots, b_k \in B$ に対して，$T^{b_1} \cap \cdots \cap T^{b_k}$ は解析集合であり，点 a を含む有限個の解析的既約成分が存在する．そこで，k を動かしたときに，点 a を含む解析的既約成分の個数と各既約成分の次元がそれぞれ極小になるものを考える．

そのような有限個の解析的既約成分の和集合を $(T^{b_1} \cap \cdots \cap T^{b_k})_a$ と書くことにする．このとき，

$$(T^{b_1} \cap \cdots \cap T^{b_k})_a = (T^{b_1} \cap \cdots \cap T^{b_k})_a \cap \bigcap \mathcal{B}$$

である．また，

$$(T^{b_1}\cap\cdots\cap T^{b_k})=(T^{b_1}\cap\cdots\cap T^{b_k})_a\cup(T^{b_1}\cap\cdots\cap T^{b_k})'_a$$

となる部分集合 $(T^{b_1}\cap\cdots\cap T^{b_k})'_a\subseteq_{cl}V$ で $a\notin(T^{b_1}\cap\cdots\cap T^{b_k})'_a$ であるようなものが存在する．したがって

$$V_a=V-(T^{b_1}\cap\cdots\cap T^{b_k})'_a$$

とおくと，$a\in V_a\subseteq_{op}V$ であり，

$$\bigcap\mathcal{B}\cap V_a=(T^{b_1}\cap\cdots\cap T^{b_k})_a\cap V_a$$

であるから，$a\in\bigcap\mathcal{B}$ の近傍 V_a で有限個の解析的既約成分の和集合になっている． ■

3 解析的ザリスキー構造の例

前節で解析的ザリスキー構造の公理系を紹介したが，この節では Peatfield および Zilber によって構成された，解析的ザリスキー構造の例を検証することにする．

いずれの例においても，どのような集合族を，前節における集合族 $\mathcal{C}$ とするかが鍵である．

3.1 Hrushovski タイプの構成法 (その 1)

これは，Peatfield と Zilber の共著論文 [PZ] において詳述されている例である．

Hrushovski が強極小集合に関する Zilber 予想や，可算範疇性に関する Lachran 予想に対する反例を構成するときに用いた手法を応用している．

Hrushovski 同様，唯一の 3 項関係記号 R を持つ言語 $\mathcal{L}$ を考える．この R は実は，一般的な「解析的関係」の高度な抽象化になっているようだが，すくなくとも論文の文面だけからでは明らかではない．また，体上で考察して訳でもないので，目標とする「複素解析的構造」のモデル理論にはまだまだ開きがあるが，とにかく第一歩である．

定義 23 (基本的な概念) 1. X を有限な $\mathcal{L}$-構造とする．
- $r(X)=|\{(x_1,x_2.x_3)\in X^3:x_1\neq x_2,x_1\neq x_3,x_2\neq x_3,R(x_1,x_2,x_3)\}|$
- $\delta(X)=|X|-r(X)$ を X の前次元という．

2. $\mathcal{K}=\{A:A$ は $\mathcal{L}$-構造で，任意の有限な部分 $\mathcal{L}$-構造 A' に対して$\delta(A')\geq 0\}$
3. $d_B(A)=\min\{\delta(A\cup X):X\subseteq_{fin}B\}$ を，A の B での相対次元という．
4. $\delta(A)=d_B(A)$ のとき，A は B で強い関係にあるといい，$A\leq B$ と書く．この概念を用いると，$\mathcal{L}$-構造 M に対して，$M\in\mathcal{K}$ と $\emptyset\leq M$ が同値になる．
5. $\mathcal{K}_0=\{A:A$ は有限 L-構造, $\emptyset\leq A\}/\sim$

最後に定義した $\mathcal{K}_0$ を用いて，Hrushovski-Fraissé タイプの構成を行い，次のような構造 M を得る．

1. M は可算集合．
2. $\mathcal{K}_0=\{A:A\leq M\}/\sim$
3. $A\leq M$ かつ $f:A\to B$ が強い埋め込みならば，$B'\leq M$ が存在して，$A\subseteq B'$ であり，同型写像 $g:B\to B'$ が存在して $gh=id_a$ が成り立つ．
4. A,B を有限な L-構造で $A\leq M$ かつ $B\leq M$ とする．このとき A から B への同型写像は，M の自己同型に拡張できる．
5. M は同型を除いて一意的である．

論文 [PZ] では M の理論 T の公理化や，T のモデル理論的性質を調べているが，ここではどのようにして M を解析的ザリスキー幾何のモデルとして捉えるかという彼らの議論に着目したい．

M に位相を定義し，その定義に関して解析的ザリスキー構造になっていることを示さなければならない．

位相を定義する基本概念は,「単純閉集合 (simple closed)」,「特殊閉集合 (special closed)」,「基本閉集合 (basic closed)」である．

定義 24 1. $A \subset N$ を有限集合とする．A の元をパラメーターとして持つことを許す，述語記号 R と等号の有限個の論理積だけで定義された関係を，A 上の単純な関係とよぶ．S が単純な n-変数関係のとき，$S(M^n) = \{\bar{x} : M \models S(\bar{x})\}$ を M^n の単純閉集合とよぶ．

2. $\bar{a}$ を有限対とする．$\bar{a}$ 上のひとつの等式イデアル $I(\bar{x})$ というのは，$\bar{x}$ の間の等式関係と $\bar{a}$ と $\bar{x}$ の間の等式関係から生成されるイデアルのことである．

3. S を単純閉集合，I を $\bar{a}$ 上の等式イデアルとする．S の定義における等式の部分だけに着目したものを $S_I(\bar{x})$ と書く．すなわち，

$$S_I(M^n) = \{\bar{x} \in S(M^n) \mid M \models I(\bar{x})\}$$

定義 25 S を有限集合 A 上の単純な関係とする．

1.

$$S(M^n) \not\subseteq \left\{ \bar{x} \in M^n \;\middle|\; \bigvee_{1 \le i < j \le n} x_i = x_j \vee \bigvee_{1 \le i \le n 1 \le j \le n} x_i = x_j \right\}$$

であるとき，S は自由であるという．

2.

$$S^0(M^n) = \left\{ \bar{x} \in S(M^n) \;\middle|\; \bigwedge_{I \subseteq \mathcal{I}(S)} \neg I(\bar{x}) \right\}$$

3.

$$S'(M^n) = \left\{ \bar{x} \in S(M^n) \;\middle|\; \bigvee_{I \subseteq \mathcal{I}(S)} I(\bar{x}) \right\}$$

4. $S^b(M^n) =$

$$\bigcup \left\{ S_J(M^n) \;\middle|\; \dim(S_J(M^n)) < \dim(S^0(M^n)), \text{ただし } J \text{ は } A \text{ 上の正規等式イデアル} \right\}$$

を，単純閉集合 $S(M^n)$ の主要部の境界とよぶ．

5.

$$\widehat{S}(M^n) = S^0(M^n) \cup S^b(M^n)$$

を，単純閉集合 $S(M^n)$ の主要部とよぶ．

定義 26 (特殊閉集合) 定義可能集合 $\subseteq M^n$ は，つぎの 2 つの条件のどちらかを満たすとき，特殊閉集合と呼ばれる．

1. S は，有限個のパラメーターを持ち，量化記号なしで定義され，次元はゼロである．
2. S は，単純閉集合の主要部であり，$|pr(S(N^n))| > 1$ であるような任意の射影 $pr; M^n \to M^m$ に対して，$\dim(pr(S(M^n))) \geq 1$ である．

定義 27 (言語) 特殊閉集合ごとに対応する述語記号を導入し，言語 $\mathcal{L}$ に添加して出来る言語を $\mathcal{L}^*$ とおく．

定義 28 $A \subseteq M$ に対して，

$$c \in \mathrm{cl}_M(A) \iff d_M(c/A) \leq 0$$

によって，A の閉包 $\mathrm{cl}_M(A)$ を定義する．

命題 29 1. $\mathrm{cl}_M(A) = \bigcup\{cl_M(A') | A \subseteq_{fin} A\}$

2. $A \subseteq \mathrm{cl}_M(A)$
3. $\mathrm{cl}_M(\mathrm{cl}_M(A)) = \mathrm{cl}_M(A)$
4. $a \in \mathrm{cl}_M(Ab)$ かつ $a \notin \mathrm{cl}_M(A)$ ならば $b \in \mathrm{cl}_M(Aa)$
5. $X \subseteq \mathrm{cl}_M(Y)$ ならば $\mathrm{cl}_M(X) \subseteq \mathrm{cl}_M(Y)$
6. $\mathrm{cl}_M(A) \subseteq M$

定義 30 (次元) A をパラメーターの集合とし，A 上定義可能な関係，あるいはタイプで定義される関係 S に対して

$$\dim(S) = \max\{d(\bar{s}/A) \mid \bar{s} \in S(M^n)\}$$

と定義する．この次元を使うと，任意の閉集合に対して次元が定義される．

このように次元を定義すると，自然につぎの補題を得る．

補題 31 S を，有限集合 A 上定義された関係とする．このとき

$$\dim(S) = 0 \iff S(M^n) \subseteq (\mathrm{cl}_M(A))^n$$

3.1.1 1点コンパクト化

構造 M はコンパクトでないので，無限遠点 ∞ を添加してコンパクト化したい．
特殊閉集合 S に対して，

$$S(\overline{M}) = S(M) \cup (\overline{M}^n - M^n)$$

と定義する．つまり，どのような特殊閉集合に対しても，∞ を 1 箇所でも含むような対 $\bar{a}$ に対しては $\bar{a} \in S$ と考える．

その一方で，δ 次元に関しては，$A \subset_{fini} \overline{M}$ とすると

$$\delta(A) = \delta(A - \{\infty\})$$

とする．すなわち δ 次元を計算するときは ∞ を含まない対のみを考える．

3.1.2 位相の定義

定義??で得られた言語 $\mathcal{L}^*$ に ∞ を添加して得られる言語を $\mathcal{L}^*_\infty$ とする．言語 $\mathcal{L}^*_\infty$ で，否定を用いずに定義される集合を $\mathcal{L}^*$-閉集合とよび，$\mathcal{L}^*$-閉集合の任意個の共通部分を $\mathbb{P}^n$ の閉集合とする位相を導入する．

この位相を詳しく分析することによって，

命題 32 (Prop. 4.2.13 [PZ]) 任意の $\mathcal{L}^*$-閉集合は，否定だけでなく，量化記号も用いずに定義される．

ことが証明されるので，この位相により射影が閉写像になっていることがわかる．解析的ザリスキー構造であるためには，射影が開写像であることも示さなければならない．そのために，specialization を考え，その spacialization を用いて π-位相というものを定義する．この π-位相を考えると，射影が開写像であることは容易に証明できる．その後で，π-位相と $\mathcal{L}^*$-閉集合による位相が同じであることを証明する．

3.1.3 解析集合の定義

Hrushovski の generic 構造 M に位相と次元が入っていることが確認できたので，この2つの概念を用いて M における解析集合を定義し，公理系 B と C が成り立つことを確認する．

定義 33 $U \subseteq \overline{M}$ を開集合とする．

1. $X \subseteq U$ が，U で相対的に閉で $(X \subseteq_{\mathcal{L}-closed} U)$，$X_1 \subseteq_{closed} U$, $X_1 \subsetneq X$, かつ $\dim(X_1) = \dim(X)$ となる集合 X_1 が存在しないとき，X は U において強既約であるという．
2. $S \subseteq \overline{M}^n$ を閉集合, $u \in \overline{M}^n$ とする．開集合 $V_u \ni u$ が存在して，$V_u \cap S$ が，V_u において強既約な有限個の閉集合の和になっているとき，閉集合 S は u で解析的であるという．
3. 各点 $u \in U$ に対して，2 で定義したような開近傍 V_u が存在するとき，閉集合 $S \cap U$ は U で解析的であるという，$S \cap U \subseteq_{an} U$ と書く．
4. $S \subseteq_{an} U$ とする．$S_1, S_2 \subsetneq S$，$S_1, S_2 \subseteq_{an} U$ かつ $S = S_1 \cup S_2$ となるような S_1, S_2 が存在しないとき，S は既約であるという．

3.1.4 Chow の定理

射影空間において解析的集合は代数的であるということを主張する，有名な Chow の定理があるが，ある意味でその定理に対応している定理が成り立っている．

定理 34 (解析的ザリスキー幾何における Chow の定理，Thm 5.2.1 [PZ]) S を $\mathbb{P}^n$ の閉集合とする．このとき，

$$S \text{ は } \mathbb{P}^n \text{ の解析的集合} \iff S \text{ は等式のみで定義される．}$$

が成り立つ．

注意 35 この定理の意味を否定的に考えると，Hrushovski generic 構造によっては解析的ザリスキー構造の「解析性」を上手く捉えることは出来ないということになるのかもしれないが，肯定的見方もあると考えられる．

今のところ，解析的ザリスキー幾何における Chow の定理の一般論はなく，論文 [PZ] で論じられている例だけなので，他の例でも同様の定理が成り立つかどうかを確認する作業が急務である．

3.2 Hrushovski タイプの構成法 (その 2)

これは，Peatfield の論文 [P1] に詳述されている例である．前節の例では，3 項関係 R が 1 つあるだけで，この R が抽象的に「解析的」関係を表現しているとされていた．しかし，本来は，複素数体上の自然な解析的関係を表現したい．

そこで [P1] では，3 項関係 R に加えて，既約代数的多様体に対応する述語記号を導入した言語を考え，その言語に関して Hrushovski generic 構造を構成し，その generic 構造を解析的ザリスキー構造として考えている．

定義 36 (言語) 1. 各既約代数的多様体 V_n に対応する述語記号を持つ言語を $\mathcal{L}'$ とする．

2. $\mathcal{L}^+ = \mathcal{L}' \cup \{R\}$，$R$ は 3 項関係述語

定義 37 (クラス $\mathcal{K}$) 1. $\delta(A) = \mathrm{tr.deg}(A) - r(A)$

2. $\mathcal{K} = \{F \mid F \text{ は標数 } p \text{ の体, 任意の } A \subseteq_{finite} F \text{ に対して} \delta(A) \geq 0\}$

3. $\mathcal{K}_0 = \mathcal{K}/\sim$

4. $sub\,\mathcal{K}_0 = \{A \mid A \text{ は有限 } \mathcal{L}^+\text{-構造かつ} \delta(A) \geq 0\}$

このクラス $sub\,\mathcal{K}_0$ を用いて Hrushovski タイプの構成を実行し，generic 構造を作る．そしてこの generic 構造を解析的ザリスキー幾何とみなす訳である．

3.2.1 位相の定義

Hrushovski generic 構造その 1 における位相の定義と同様に，単純集合，特殊閉集合を定義し，特殊閉集合の任意個の共通部分として閉集合を定義する．

定義 38 (位相の導入) 1. $\displaystyle\bigwedge_{\text{有限個}} R(\bar{x}) \wedge V(\bar{x}, \bar{a})$ の形の論理式で定義される集合を「単純集合」とよぶ．ここで $\bar{a}$ はパラメーターとする．

2. 単純集合 S に対して，

$$S^0(\bar{x}) \iff S(\bar{x}) \wedge \bigwedge_{i \neq j} x_i \neq x_j \wedge \bigwedge_{a \in \bar{a}, i} a \neq x_i$$

3. 単純集合 S の「主要部の境界」$S^b(\bar{x})$ を

$$S^b(\bar{x}) \iff \bigvee (S(\bar{x}) \wedge J(\bar{x}))$$

によって定義する．ただし，$J(\bar{x})$ は等式イデアルであり，右辺の $S \wedge J$ は $\dim(S \cap J) < \dim(S^0)$ を満たしているものだけを動く．

4. $S^0 \cup S^b$ を S の主要部とよび，$\hat{S}$ と書く．
5. 量化記号なしで定義される，次元ゼロの集合および，単純集合 S の主要部 $\hat{S}$ になっていて，次元ゼロの射影は 1 点集合だけであるような集合を合わせて，「特殊閉集合」とよぶ．
6. 既約代数多様体に対応する述語，あるいは特殊閉集合に対応する述語をもちいて $\wedge, \vee, \exists$ だけを用いて定義される集合の，任意個の共通部分を閉集合とする．

3.2.2 この構造における「解析性」の特徴づけ

つぎの一連の補題と定理が解析性を特徴付けている．

補題 39 (Lemma 3.31 [P1]) $S \subseteq_{cl} U \subseteq_{op} \overline{K}$ は以下の性質を持つならば，U の解析的集合，すなわち $S \subseteq_{an} U$ である．

1. S は局所的に量化記号なしで定義される．
2. 各変数 x_i に対して，S が変数 x_i に特殊閉集合的関係を強制するならば，$S \vdash_{T^{\pm}_{\infty}} x_i = \infty$ または $U \vdash_{T^{\pm}_{\infty}} x_i \neq \infty$

系 40 局所的に量化記号なしで定義されている閉集合 S は，K^n の任意の開集合 U において解析的である，つまり $S \subseteq_{an} U$ である．

定理 41 (固有写像定理, Thm. 3.35 [P1]) $S \subseteq_{an} W \subseteq_{op} \subseteq \overline{K}^n$ とし，$pr : \overline{K}^n \to \overline{K}^m$ を射影とする．$pr(S) \subseteq U \subseteq_{op} \overline{K}^m$ かつ射影 pr が S で固有ならば $pr(S) \subseteq_{an} U$ である．

定理 42 (Thm. 3.36 [P1]) $S \subseteq_{cl} U \subseteq_{op} \overline{K}^n$ とする．$S \subseteq_{an} U$ であるための必要十分条件は，つぎの 1 または 2 である．

1. S は局所的に量化記号なしで定義されていて，各変数 x_i に対して，S が変数 x_i に特殊閉集合的関係を強制するならば，$S \vdash_{T^{\pm}_{\infty}} x_i = \infty$ または $U \vdash_{T^{\pm}_{\infty}} x_i \neq \infty$
2. S は 1 の性質を持つ集合の，固有射影である．

3.3 導関数を持つ関数を添加した体

これは，Peatfield の論文 [P2] に詳述されている例である．

解析集合は，解析関数の零点集合であるから，当然「解析性」をモデル理論的に扱う場合は，解析関数をどう取り入れるかが問題になる．ベキ級数に展開できるということをどう表現するかが，最後まで大きな課題として残る．

Peatfield は，Zilber の試みに触発され，論文 [P2] において，一つの一般的な関数 f と，その n 次導関数 $f^{(n)}$ を添加した体を解析的ザリスキー幾何ととらえる試みを展開している．

参考文献

[Ho] Wilfrid Hodges, Model Theory, Cambridge UP, 1993

[HZ] Ehud Hrushovski, Boris Zilber, Zariski geometries, J of the AMS, 1996

[It] 板井　昌典,『幾何的モデル理論入門』, 日本評論社, 2002

[Ma] David Marker, Model Theory: An Introduction, GTM 217, Springer, 2002

[O1] 大沢　健夫,『複素解析幾何と $\bar{\partial}$ 方程式』, 培風館, 2006

[P1] Nick Peatfield, An analytic Zariski structure over a field, Archive for Mathematical Logic, 45(6), pp. 739-768 (2006)

[P2] Nick Peatfield, A complex-like Analytic Zariski structures on models of the theory of a generic function with derivatives

[PZ] Nick Peatfield, Boris Zilber, Analytic Zariski structures and the Hrushovski construction, Annals of Pure and Applied Logic 132(2005) 127-180

[Z1] Boris Zilber, Non-commutative geometry and Zariski geometry

[Z2] Boris Zilber, A class of quantum Zariski geometries

[Z3] Boris Zilber, Zariski Geometries Geometry from the logician's point of view, Oct. 30, 2007